ӘОЖ 517.27

ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯ ГРАФИГІНІҢ АСИМПТОТАЛАРЫН ТАБУ

А.С. Даулетова[1], Ж.А. Аралбаева[1], Д.А. Ахметбай[1].
«7M01503 – Математика. Білім беру үрдісін басқару»
білім беру бағдарламасының 2 курс магистранттары[1]
Х.Досмухамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы
Ғылыми жетекшісі – техника ғылымдарының докторы, профессор **Б. Кенжегулов**

Кіріспе

Функциялардың теориясы математиканың негізгі бөлігі болып табылады, ол нақты әлемнің көптеген құбылыстарын математикалық тұрғыдан сипаттауға мүмкіндік береді. Функцияны зерттеу және олардың графиктерін салу – орта мектеп бағдарламасында математиканың маңызды бөлігі болып саналады. Бұл процес функцияның қасиеттерін терең түсінуге, талдауға және практикалық есептерді шешуге көмектеседі. Функция графигінің асимптоталары функцияның шексіздікке ұмтылғандағы әрекетін сипаттайтын маңызды элементтер болып табылады, графиктердің шекарасы десек те болады. Дәрежелік функциялардың графиктері $x \to \infty$ және $x \to 0$ ұмтылғанда сәйкесінше Ox және Oy осьтеріне жақындағанымен қиылыспайды.

Негізгі бөлім

Анықтама 1 Асимптота деп – функцияның графигі шексіздікке (өте үлкен немесе өте кішкентай сандарға) ұмтылғанда, оған жақындайтын, бірақ ешқашан қиылыспайтын түзу сызықты айтамыз [1]

Мектеп бағдарламасында асимптоталардың - **вертикаль, горизонталь, көлбеу** деп аталатын негізгі үш түрі оқытылады. Жеке-жеке тоқталатын болсақ:

Вертикаль асимптоталар функцияның анықталу облысындағы үзілісті нүктелерінде кездесіп, функцияның шегі шексіздікке ұмтылғанда белгілі бір көлбеу сызыққа жақындағанда пайда болып, $x = a$ түріндегі теңдеумен жазылады. Егер функция бөлшек түрінде берілсе, вертикаль асимптотаны табу үшін бөлшектің бөлімін нөлге теңестіріп, теңдеуді шешуіміз керек. Бұл жағдайда шыққан мәндерді функцияның вертикаль асимптотасы ретінде қарастыру үшін анықталу облысына кіретінін тексеруіміз керек. Егер функция түбір астында немесе логарифмдік функцияның астында берілсе, онда x-тің кейбір мәндерінде функцияның мәні нақты сан бола алмайды. **Вертикаль** асимптота болатын нүкте табылса, шешімдердің әрқайсысы үшін сол жақтан және оң жақтан жақындағандағы шекті есептеу керек. Егер кем дегенде бір шек ±∞-ке тең болса, онда функцияның **вертикаль** асимптотасы бар дегенді білдіреді.

Горизонталь асимптоталар функцияның графигі шексіздікке ұмтылғанда белгілі бір горизонталь сызыққа жақындағанда пайда болып, $y = b$ түріндегі теңдеумен беріледі. Горизонталь асимптотаны табу үшін функцияның шегін екі жағдайда есептеу керек. $x \to +\infty$ және $x \to -\infty$ ұмтылғандағы мәнін есептегенде екі шектің мәні бірдей нақты санға тең болса, онда $y = b$ түзуі функцияның горизонталь асимптотасы болады. Егер екі шектің мәндері әртүрлі нақты сандарға тең болса, функцияның екі гризонталь асимптотасы болады. Керісінше жағдайда, екі шектің біреуі немесе екеуі де шексіздікке тең болса, онда функцияның **горизонталь** асимптотасы жоқ.

Көлбеу асимптоталар функцияның графигі шексіздікке ұмтылғанда белгілі бір көлбеу сызыққа жақындағанда пайда болып, $y = kx + b$ түріндегі теңдеумен жазылады. Мұндағы k-көлбеу асимптотаның бұрыштық коэффициенті (көлбеулігі). b-көлбеу асимптотаның y-осімен қиылысу нүктесі. Бұрыштық коэффициентті табу үшін келесі шекті есептеу керек:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (1)$$

Егер бұрыштық коэффициенті (көлбеулігі) нақты санға тең болса, онда осы функцияның көлбеу асимптотасы болады да, шексіздікке тең болса көлбеу асимптотасы болмайды. Кейбір жағдайларда екі шек әртүрлі сандарға тең болса, онда екі көлбеу асимптота болуы мүмкін. Бұрыштық коэффициент табылғаннан кейін көлбеу асимптотаның y-осімен қиылысу нүктесі – b-ны табу керек. Ол үшін төмендегідей шекті есептеу формуласын қолданамыз:

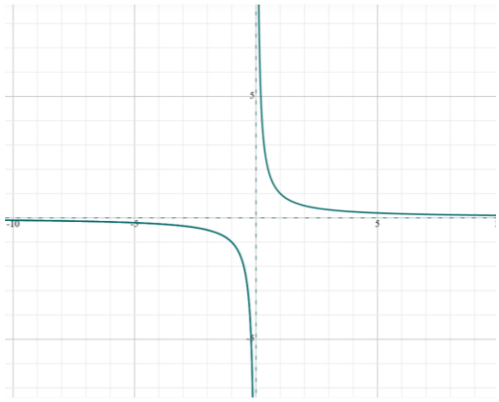
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]. \qquad (2)$$

Егер бұл шек нақты санға тең болса, онда көлбеу асимптота бар және ол $y = kx + b$ теңдеуімен жазылады.

Асимптота математиканың маңызды бөлігі болып табылады және әртүрлі ғылыми және практикалық салаларда қолданылады. Ол функцияның қасиеттерін талдауда, оның экстремумдарын, дөңестігін және иілу нүктелерін анықтауда маңызды рөл атқарады, сонымен қатар асимптоталар арқылы функцияның графигін дәлірек және толық салуға болады. Асимптоталардың әр түріне мысалдар келтірейік [1, 2].

1-мысал. $f(x) = \frac{1}{x}$ (Сурет 1) функциясының графигі гипербола болатыны белгілі.

Енді осы функцияның асимптотасын табайық. $x = 0$ нүктесінде вертикаль асимптота болатынына көз жеткізейік. Расында, $= -\infty$ және $= +\infty$. Сондықтан графикке қарасақ, $x = 0$, $f(x) = 0$ нүктесі арқылы әрі вертикаль, әрі горизонталь асимптоталар өтеді екен. Сонымен абсцисса осі горизонталь асимптота, ордината осі вертикаль асимптота болады.



Сурет 1 – Гипербола графигі

2-мысал. $f(x)=\frac{2x^3+5x}{x^2-4}$ (Сурет 2) функциясының асимптоталарын табайық.

Алдымен **вертикаль** асимптоталарын табу үшін функцияның бөлімін нөлге теңестіріп, келесі нәтижені аламыз:

$x^2-4=0$, немесе $x^2=4$, бұдан $x=-2$ және $x=2$ екі вертикаль асимптотаны анықтаймыз. Енді $x=-2$ және $x=2$ нүктелеріндегі шектерді тексереміз. Бөлшектің бөлімі нөлге жақындайды да, нәтижесінде шексіздікке тең болады.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3+5x}{x^2-4}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{2x^3+5x}{x^2-4}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to -2-0}\frac{2x^3+5x}{x^2-4}=-\infty; \qquad \lim_{x\to -2+0}\frac{2x^3+5x}{x^2-4}=+\infty.$$

Демек, функцияның вертикаль асимптоталары $x=2$ және $x=-2$ нүктелері арқылы өтіп, Oy осіне параллель болады.

Көлбеу асимптотасын табу үшін $y=kx+b$ теңдеуін қолданамыз. Алдымен функцияның алымындағы ортақ көбейткішті жақшаның сыртына шығарып, қысқартамыз. Содан кейін бөлшектің алымын да бөлімін де айнымалының үлкен дәрежесіне бөліп, шексіздікті x-тің орнына қою арқылы шекті есептейміз:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(2x^2+5)}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}$$
$$=\frac{2+0}{1-0}=2$$

Осыдан $y=2x$ функциясын аламыз. Сонда $k=2$. Енді b-дің мәнін есептейік. Ол үшін берілген функциядан kx-ті азайтып, ортақ бөлімге келтіреміз.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^3+5x}{x^2-4}-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x-2x(x^2-4)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x-2x^3+8x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+8x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{13x}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{13x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{13}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{13}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

b-нің мәні нөлге тең болады екен, сондықтан көлбеу асимптотасы келесідей болады:

$x \to \pm\infty$ $x \quad - 4$ $x \to \pm\infty$ $x \quad - 4$ $x \to \pm\infty$ $x \quad - 4$

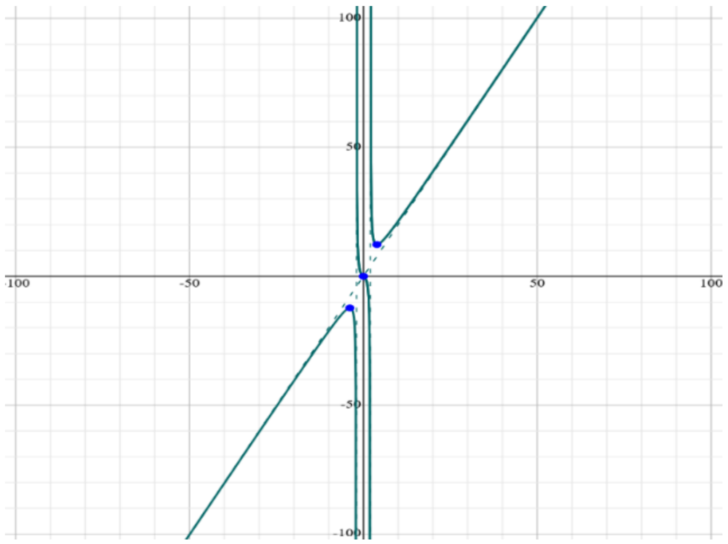
$y = 2x.$

Горизонталь асимптотаны табу үшін функцияның шегін аргументі $\pm\infty$ ұмтылғандағы мәнін есептейміз. Ол үшін бөлшектің алымын да бөлімін де айнымалының үлкен дәрежесіне бөліп, өрнекті ықшамдаймыз. Содан соң шекті есептеп шығарамыз.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}=\frac{2+0}{0-0}=\frac{2}{0}=\infty$$

Демек, бұл функцияның горизонталь асимптотасы жоқ.

Жауабы: вертикаль асимптоталары $x=2$ және $x=-2$, көлбеу асимптотасы $y=2x$; горизонталь асимптотасы жоқ.



Сурет 2 – Функцияның асимптоталары

Функцияны зерттеу – тек теориялық қана емес, сонымен қатар практикалық маңызы бар математикалық процесс болып табылады. Функцияны зерттеу арқылы біз функциялардың қалай жұмыс істейтінін, олардың мәндерін, экстремумдарын, иілу нүктелерін және өзгеру заңдылықтарын анықтай аламыз. Функцияның өзгеруін ең көрнекі түрде оның графигі көрсетеді. Сондықтан график салу функцияны зерттеудің соңғы кезеңі болып табылады, мұнда зерттеу нәтижелері толығымен қолданылады. Функция графигін салу мынадай тәртіп бойынша жүргізіледі [1,3]:

1. Функцияның анықталу облысы анықталады.
2. Функцияның жұптығы мен тақтығы зерттеледі. Бұл қасиеттерді еске түсірейік. Жұп функция $f(-x)=f(x)$ шартын қанағаттандыратын функция. Жұп функцияның графигі ордината осіне симметриялы болады. Мысалы, $y=cosx$ немесе $y=x\cdot sinx$ – жұп функциялар болады. Тақ функция $f(-x)=-f(x)$ шартын қанағаттандыратын функция. Оның графигі координаталар басына симметриялы болады. Мысалы, $y=x^3$ немесе $y=x\cdot cos2x$ – тақ функциялар болады.
3. Функцияның периодтылығы анықталады. Егер $T>0$ саны табылып, ол үшін $f(x+T)=f(x)$ теңдігі орындалса, функция **периодты** деп аталады. Мысалы, $y=sinx,\ cosx$ (периоды – 2π), $y=tgx,\ ctgx$ (периоды – π).
4. Функцияның үзілу нүктелері анықталады және ол нүктелерде біржақты шектер есептеледі.
5. Функция графигінің координаталар осьтерімен қиылысу нүктелері анықталады, яғни, графиктің x-осі мен y-осін қай жерде қиып өтетіні есептеледі.
6. Функцияның шексіздікке ұмтылғандағы әрекеті анықталады.
7. Функцияның өсу және кему аралықтары анықталады.

8. Функция экстремумға (максимум және минимум) зерттеледі.

9. Функцияның дөңестік (жоғары қарай дөңес) және ойыстық (төмен қарай дөңес) қасиеттері зерттеледі. Иілу нүктелері анықталады.

10. Егер асимптоталар бар болса, олардың теңдеулері жазылып, мәндері анықталады.

11. Функцияның графигі салынады.

1-мысал. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ функциясын зерттеп, графигін салайық. [1]

Шешуі: 1) Анықталу облысы $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$,

2) Функцияның жұптылығын анықтаймыз. $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{-x-1}$.

$f(-x) \neq f(x)$, олай болса функция жұп та, тақ та емес.

3) Функцияның периодтылығын анықтаймыз. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ функциясы периодты емес.

4) Функцияның үзіліс нүктесі оның анықталу облысынан тыс нүктелерінде немесе үзіліс орын алатын нүктелерде болады. Функция $x = 1$ нүктесінде анықталмаған, себебі бұл нүктедегі мәні функцияның анықталу облысына тиісті емес. Үзілістің түрін анықтау үшін $x = 1$ нүктесіндегі біржақты шектерді табамыз.

$\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$. Демек, $x = 1$ үзіліс нүктесі болады және I текті үзіліс орын алады.

5) Графиктің x осімен қиылысуы үшін $y = 0$ болуы керек.

$\frac{x^2+1}{x-1} = 0$. Бұл теңдеу $x^2 + 1 = 0$ теңдеуіне сәйкес келеді. Алайда нақты сандарда $x^2 = -1$ шешімі жоқ. Сол себепті функцияның x осімен қиылысу нүктесі жоқ. Ал y осімен қиылысу нүктесін табу үшін $x = 0$ деп аламыз.

$f(0) = \frac{0^2+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$. Демек, функция y- осьін $(0;\ -1)$ нүктесінде қиып өтеді.

6) Функцияның шексіздікке ұмтылғандағы әрекетін анықтайық. Ол үшін шекті анықтауда функцияның ең үлкен дәрежесіне бөлшектің алымын да, бөлімін де бөліп, кейіннен шекке көшеміз. Сонда $x \to +\infty$ ұмтылғанда, функция да $+\infty$-ке ұмтылады, ал $x \to -\infty$ ұмтылғанда, функция $-\infty$-ке ұмтылады.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{0-0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{0-0} = -\infty$$

7) Функцияның өсу және кему аралықтарын табу үшін біз функцияның бірінші ретті туындысын табамыз. Ол үшін бөлшектің туындысын табу ережесін қолданамыз:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x-1) - (x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Енді $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ функциясының таңбасын анықтайық. $(x-1)^2$ әрқашан оң болғандықтан, функцияның өсуі мен кемуі $x^2 - 2x - 1$ -дің таңбасына байланысты болады. Алдымен $x^2 - 2x - 1 = 0$ теңдеуін шешеміз. Сонда

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ нүктелері болып табылады. $x < 1 + \sqrt{2}$ интервалында: $x^2 - 2x - 1 > 0$, сондықтан $f'(x) > 0$, функция өсу үстінде.

$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ интервалында: $x^2 - 2x - 1 < 0$, сондықтан $f'(x) < 0$, функция кему үстінде.

8) Функцияның экстремум нүктелерін табу үшін, алдымен оның туындысын табу және одан кейін экстремумдардың орналасқан нүктелерін анықтау керек. Біз бұл функцияның туындысын алдыңғы функцияның өсу және кему аралықтарын анықтаған кезде тапқанбыз. Теңдеудің түбірлері арқылы экстремумның түрін анықтаймыз. Егер $f'(x)$ оңнан теріске ауысса, онда функция максимум алады. Ал егер $f'(x)$ терістен оңға ауысса, онда минимум алады. Енді x_1 және x_2 нүктелеріндегі функцияның өзгерісін талдайық. $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ нүктесінде туындының таңбасы оңнан теріске ауысатындықтан, бұл нүкте **максимум** болады. $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ нүктесінде туындының таңбасы терістен оңға ауысатындықтан, бұл нүкте **минимум** болады. Экстремумдардың мәндерін табу үшін x_1 және x_2 мәндерін бастапқы функцияға, яғни, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ функциясына қойып есептейміз.

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{(1+\sqrt{2})-1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{2} = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{2} = 2(\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}+2.$$

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{(1-\sqrt{2})-1} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{(4-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{-2} = -\frac{4(\sqrt{2}-1)}{2} = -2(\sqrt{2}-1) = -2\sqrt{2}+2.$$

$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0$ болғанда $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ және $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Алынған мәліметтер бойынша кесте құрайық (1-кесте):

Кесте 1 – Функцияның өсу және кему аралықтары.

x	$(-\infty; 1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2}; 1)$	1	$(1; 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	Болмайды	−	0	+
$f(x)$	Өседі	$-2\sqrt{2}+2$	Кемиді	Анықталмаған	кемиді	$2\sqrt{2}+2$	өседі
	↗	max	↘	Үзілісті	↘	Min	↗

9) Дөңестікке зерттейміз. Функцияның бірінші ретті туындысынан екінші ретті туындысын табу керек. Ол үшін бөлшектің туындысын есептеу формуласын қолданамыз:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x^2-2x-1)'(x-1)^2-(x^2-2x-1)((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2} =$$

$$\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)(2(x-1))}{((x-1)^2)^2} = \frac{2x^3-4x^2+2x-2x^2+4x-2-2x^3+4x^2+2x+2x^2-4x-2}{(x-1)^4} = \frac{2x-2+2x-2}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{4x-4}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

$D(f)$-тан алынған кез-келген x үшін $f''(x) \neq 0$, демек, функцияның иілу нүктесі болмайды. Сонда $x < 1$ жағдайында $f''(x) < 0$ және $x > 1$ жағдайында $f''(x) > 0$, яғни $x < 1$ болғанда функцияның дөңестігі жоғары,

$x > 1$ болғанда төмен қарайды, яғни ойыс. Алынған мәліметтер бойынша кесте құрамыз (2-кесте):

Кесте 2 – Функцияның ойыс, дөңес аралықтары.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	Болмайды	$+$
$f(x)$	Дөңестігі жоғары қараған	анықталмаған	Дөңестігі төмен қараған (ойыс)
		Үзілісті	

10) Функцияның асимптоталарын анықтаймыз. Берілген функция: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

Алдымен **вертикаль** асимптоталарын табу үшін функцияның бөлімін нөлге теңестіріп, келесі нәтижені аламыз:

$x - 1 = 0$, бұдан $x = 1$. Демек, функцияның вертикаль асимптотасы $x = 1$ нүктесі арқылы өтіп, Oy осьіне паралель болады.

Көлбеу асимптотаны табу үшін $y = kx + b$ теңдеуін қолданамыз. Алдымен функцияның бөліміндегі жақшаны ашамыз. Содан кейін бөлшектің алымын да бөлімін де айнымалының үлкен дәрежесіне бөліп, шексіздікті x-тің орнына қою арқылы шекті есептейміз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Осыдан $y = x$ функциясын аламыз. Сонда $k = 1$. Енді b-дің мәнін есептейік. Ол үшін берілген функциядан kx-ті азайтып, ортақ бөлімге келтіреміз.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0+1}{1-0} = 1.$$

b- нің мәні бірге тең болады екен, сондықтан көлбеу асимптотасы келесідей болады: $y = x + 1$.

Горизонталь асимптотаны табу үшін функцияның шегін аргументі $\pm\infty$ ұмтылғандағы мәнін есептейміз. Ол үшін бөлшектің алымын да бөлімін де айнымалының үлкен дәрежесіне бөліп, өрнекті ықшамдаймыз. Содан соң шекті есептеп шығарамыз.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

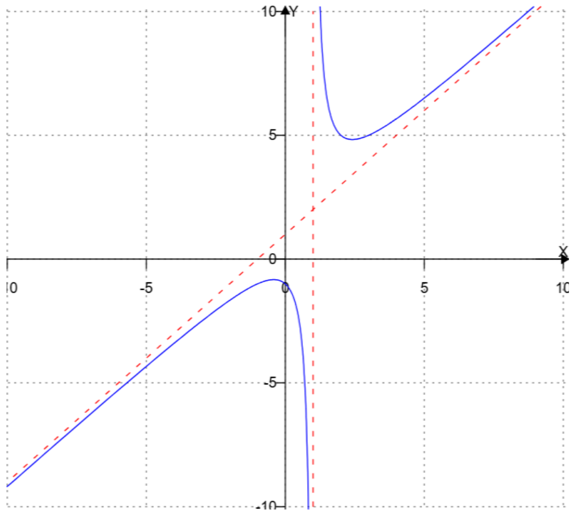
Демек, бұл функцияның горизонталь асимптотасы жоқ.

11) Функцияның графигін салу үшін функцияның кейбір нүктелерінің мәндерінің кестесін құрамыз (3-кесте):

3-кесте – Функцияның аргументіне жекелеген сандар беру.

x	-1	0	0,5	1.5	2	3
$f(x)$	1	-1	$-2{,}5$	2,5	2,5	2,5

Енді зерттеу бойынша функцияның графигін саламыз (Сурет 3).



Сурет 3 – Функцияның графигі

Қорытынды

Бұл мақалада біз функцияларды толық зерттеудің және олардың графиктерін салудың негізгі жолдарын қарастырдық. Функцияның анықталу облысын, бөлімінің нөлге тең еместігін, таңба тұрақтылық аралықтарын, монотондылық аралықтарын, экстремумдарын және иілу нүктелерін анықтаудың маңыздылығын атап өттік. Сонымен қатар, біз функцияның графигінің (кескіні) қасиеттерін сипаттайтын асимптоталардың түрлерін (вертикаль, горизонталь, көлбеу) және оларды табу әдістерін талдадық.

Функцияны зерттеу және асимптоталарын анықтау математиканың негізгі бөлігі болып табылып, ол математиканың, физиканың, инженерияның және экономиканың көптеген салаларында қолданылады. Мақалада ұсынылған әдістерді практикалық есептерді шешуде қолдану – функцияларды тереңірек түсінуге және олардың қасиеттерін тиімді пайдалануға мүмкіндік береді. Функцияларды зерттеу және асимптоталарды табу әдістерін меңгеру білім алушылар мен зерттеушілерге ғылыми және техникалық есептерді шешуде серпімділік береді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Бабрин И.И. Высшая математика: Учеб. для студ. Естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр “Академия”; Высшая школа, 2001. – 616 с.

2. Әбілқасымова А.Е. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану- математика бағытындағы 10 - сыныбына арналған оқулық.
/Әбілқасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е., Жұмағұлова З.Ә. – Алматы: Мектеп, 2019- 176 б.

3. Темірғалиев Н. Математикалық анализ: Университеттер мен педагогикалық және техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 1987. – 288 бет.